

des Gitters, der mit ν_1 Schallquanten der Gitterwelle 1, mit ν_2 Schallquanten der Gitterwelle 2 usw. besetzt ist. Wir bilden nun den Ausdruck für die örtliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons 1. (Da wir von Symmetrie-Eigenschaften bei Teilchenvertauschungen keinen Gebrauch machen, können wir die Teilchen ruhig als unterscheidbar ansehen.)

$$w(\mathbf{r}_1) = \int \dots \int \langle \Psi_{\mathbf{R}}^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \Psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \rangle d\tau_2 \dots d\tau_n^8 \\ = \sum_{(\mu)} \sum_{(\nu)} \int \dots \int e^{i(w_1(\mu_1 - \nu_1) + \dots)} \Re U_{(\mu)}^* U_{(\nu)} \\ d\tau_2 \dots d\tau_n \langle \Phi_{(\mu)}^* \Phi_{(\nu)} \rangle.$$

Wegen $\langle \Phi_{(\mu)}^* \Phi_{(\nu)} \rangle = \delta_{\mu_1 \nu_1} \cdot \delta_{\mu_2 \nu_2} \dots \delta_{\mu_N \nu_N}$

reduziert sich der Ausdruck für $w(\mathbf{r}_1)$ auf

$$\sum_{(\mu)} \int \dots \int |U_{(\mu)}(\Re, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)|^2 d\tau_2 \dots d\tau_n. \quad (4)$$

Wir zeigen nun, daß $w(\mathbf{r}_1)$ gitterperiodisch ist, sich also das Elektron nicht an einem ausgezeichneten Gitterpunkt in einem lokalisierten Zustand befinden kann. Dazu ersetzen wir in $w(\mathbf{r}_1)$ die Elektronenkoordinate \mathbf{r}_1 durch $\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}$ (\mathbf{a} : Gittervektor) und ändern gleichzeitig die Integrationsvariablen \mathbf{r}_i , $i > 1$ in $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}$ ab (letztere Substitution läßt den Wert des Integrals natürlich unverändert):

$$w(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}) = \sum_{(\mu)} \int \dots \int |U_{(\mu)}(\Re + \mathbf{a}, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)|^2 d\tau_2 \dots d\tau_n.$$

Da die $U_{(\mu)}$ in \Re gitterperiodisch sind, ist der letztere Ausdruck mit $w(\mathbf{r}_1)$ identisch, also tatsächlich

$$w(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}) = w(\mathbf{r}_1). \quad (5)$$

In vielen Arbeiten wird der Hamilton-Operator speziell so angesetzt, daß er schon gegenüber einer Sub-

stitution (2) mit infinitesimalem \mathbf{a} invariant ist. Dann ist die örtliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit konstant (6). Die Eigenschaft (5) bzw. (6) muß notwendig jede Lösung aufweisen. Beispielsweise erfüllt der Lösungsansatz, den Fröhlich in seinem eindimensionalen Modell der Supraleitung⁹ verwendet, die in diesem Fall zutreffende Bedingung (6) jedoch nicht, so daß sein Ansatz noch nicht die Form der exakten Lösung (3) besitzt.

Obgleich es, wie wir eben zeigten, keine lokalisierten stationären Zustände in einem Gitter mit Translations-symmetrie gibt, so kann trotzdem ein Lösungsansatz, der ganz oder teilweise lokalisierte Elektronen- bzw. Schwingungszustände des Gitters benutzt, durchaus sehr nützlich sein. Durch einen solchen Ansatz lassen sich nämlich oft schon wesentliche Teile der in Frage stehenden Wechselwirkungen erfassen. Als Beispiele seien hier nur die Blochsche¹⁰ Behandlung des Eielektronenproblems im ruhenden Gitter (Verwendung von Atomfunktionen) und die Pekarsche¹ Behandlung des Eielektronenproblems im schwingenden polaren Medium genannt. Man darf jedoch bei einem solchen Lösungsansatz nicht stehen bleiben, sondern hat dann aus allen Funktionen, die aus der ursprünglich bestimmten lokalisierten Funktion durch Deckoperationen des Gitters hervorgehen, Linearkombinationen aufzubauen, die speziell mit (3) verträglich sein müssen¹¹. Beispiele hierfür sind die eben erwähnte Blochsche¹⁰ Methode und die Höhlersche⁶ Behandlung des Polaronenproblems.

Herrn Professor Dr. H. Volz danke ich für interessante Diskussionen.

⁸ Bei Berücksichtigung des Spins ist noch über die Spinkoordinaten zu summieren.

⁹ H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc. A **223**, 296 [1954].

¹⁰ F. Bloch, Z. Phys. **52**, 555 [1928].

¹¹ Ob diese Funktionsmännigfaltigkeit dann schon eine hinreichend gute Lösung darstellt, bedarf natür-

lich stets noch einer besonderen Untersuchung. Auf jeden Fall sind zu der betrachteten Lösungsmannigfaltigkeit noch solche Funktionen hinzuzunehmen, die mit den ursprünglichen energetisch entartet sind (und mit ihnen kombinieren).

Das W-K α -Interferenzbild des flüssigen Antimons

Von H. Hendus und H. Müller

Institut für Metallforschung, Saarbrücken

(Z. Naturforsch. **10a**, 254—255 [1955]; eingeg. am 24. Februar 1955)

Röntgeninterferenzaufnahmen von flüssigem Antimon können seines relativ hohen Dampfdruckes wegen nicht im Reflexionsverfahren an der freien ebenen Schmelzoberfläche, sondern nur an einer abgeschlossenen Probe im Durchstrahlverfahren gemacht werden. Als Probenbehälter kommen z. B. geschlossene Kapillaren oder Küvetten aus Quarzglas in Betracht. Bei Aufnahmen mit einer der gebräuchlichen K α -Röntgenwellenlängen darf der Radius der Kapillare oder die Spaltbreite der Küvette wegen des starken Absorptionsvermögens des Antimons wenige Hundertstel eines Millimeters nicht überschreiten. Zudem wird der Anteil der Quarzstreuung an der Gesamtstreuung bei der min-

destens erforderlichen Wanddicke der Kapillaren oder Küvetten nicht unerheblich.

Diese Verhältnisse werden mit kürzer werdender Wellenlänge günstiger, weshalb ein Versuch mit Wolfram-K α -Strahlung lohnend erschien. Wir verwenden für unsere Versuche die W-K α -Strahlung einer Röhre mit Feinfokus von 0,2 mm Durchmesser (Bauart R. Seifert, Hamburg). Das an einer 0,2 mm dicken (10 $\bar{1}1$)-Quarzplatte reflektierte K $\alpha_1\alpha_2$ -Dublett fällt durch ein sorgfältig gebautes Blendensystem senkrecht auf die indirekt geheizte, abgeschmolzene Küvette aus Quarzglas mit Wandstärken von 0,25 mm und mit einer optimalen Schichtdicke des flüssigen Antimons von 0,2 mm. Die Abstände zwischen Brennfleck — Monochromator — Blende — Küvette sind so klein wie möglich gehalten. Die nicht unerhebliche Streustrahlung erforderte eine sorgfältige Bleiabschirmung.

Die Aufnahme von geschmolzenem Antimon bei 645°C in Abb. 1 entstand unter folgenden Bedingungen: 137 kV; 1,5 mA; 125 h; Gevaert-Structurix D 10-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Film; Radius Schmelze — Film 70 mm; bestrahltes Schmelzvolumen $1,7 \times 0,2 \times 0,2 \text{ mm}^3$. Die Sb-K α -Eigenstrahlung wurde durch ein Eisenfilter bis auf einen verschwindenden Bruchteil reduziert. Die Photometerkurve läßt fünf Intensitätsmaxima erkennen, wovon das erste und zweite je ein kleines Nebenmaximum bei etwas größeren Beugungswinkeln aufweist, wie es ähnlich bei flüssigem Ga, Ge und Bi beobachtet wurde¹. Die aus korrigierten Intensitätskurven mehrerer Aufnahmen errechneten mittleren Röntgenperioden d der ersten drei Interferenzmaxima des flüssigen Antimons sind in Tab. 1 den Perioden des amorphen Antimons² gegenübergestellt.



Abb. 1. Wolfram-K α -Interferenzbild des flüssigen Antimons.

Sie stimmen auffallend gut mit den Röntgenperioden der ersten, dritten und fünften Interferenz des amorphen Antimons überein. Die mit relativ starker Intensität auftretenden Interferenzen des amorphen Antimons mit den Perioden 1,90 kX und 1,25 kX fehlen dagegen im Interferenzbild des flüssigen Antimons

¹ H. Hendus, Z. Naturforsch. **2a**, 505 [1947].

² H. Richter, H. Berckhemer u. G. Breitling, Z. Naturforsch. **9a**, 236 [1954]. Aus den dort ange-

vollständig. Die Atomverteilung beider Phasen muß demnach eine verschiedene sein.

Die Auflösung des K $\alpha_1 \alpha_2$ -Dubletts am Monochromator ist bei der Wellenlänge 0,21 kX schon merklich. Diese wird jedoch durch die unterschiedlichen Interferenzwinkel von α_1 und α_2 an der Schmelze auf der einen Aufnahmehälfte im interessierenden Streuwinkelbereich fast völlig kompensiert. Eine zur Kontrolle unter den gleichen Bedingungen gewonnene Debye-Aufnahme an einem Stahlplättchen bestätigt dies. Aufnahmen von flüssigem Quecksilber ergaben eine sehr gute Übereinstimmung mit dem früher mit Mo- und Cu-K α -Strahlung gefundenen Intensitätsverlauf³.

Periode	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
Sb amorph	5,52	3,02	1,90	1,48	1,25	1,01
Sb flüssig	—	2,98	—	1,47	—	1,01

Tab. 1. Röntgenperioden des amorphen und des flüssigen Antimons in kX.

Die beschriebene Methode ist demnach für die Röntgenuntersuchung von flüssigen Metallen und Legierungen, auch solcher mit relativ hohem Dampfdruck und Schmelzpunkt, geeignet. Eine Beschränkung auf Substanzen mit $Z \geq 26$ ergibt sich allerdings aus der Begrenzung der durchstrahlten optimalen Schichtdicke zur Vermeidung unzulässiger Linienverbreiterung.

gegebenen Periodenwerten wurden jeweils die Mittelwerte gebildet.

³ H. Hendus, Z. Naturforsch. **3a**, 416 [1948].

Zur nichtlinearen Mesontheorie

Von Gernot Eder

Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. **10a**, 255 [1955]; eingeg. am 3. März 1955)

Die von Schiff¹ und Thirring² vorgeschlagene nichtlineare Mesongleichung

$$(\square - \mu^2) \Phi - \lambda \Phi^3 = -g\varphi \quad (1)$$

zur Deutung der Absättigung der Kernkräfte führt nach Mittelstaedt³ zu den Werten $\lambda = 417$ und $g = 2,91$, wenn man die Gleichung klassisch behandelt. Nun wies Thirring⁴ darauf hin, daß ein so großer Wert von λ nicht in Übereinstimmung mit den experimentellen Meson-Kern-Streuquerschnitten gebracht werden kann. Betrachtet man die Streuung ebenfalls als ein klassisches Problem, so kann man

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_a + \varphi \quad (2)$$

schreiben. Dabei ist $\Phi_e = C \cdot \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - Et)$ eine einlaufende ebene Welle (die Konstante C ist ein Maß für die Intensität der Welle) und φ die statische Lösung von (1). Entwickeln wir die auslaufende Welle Φ_a nach Potenzen von C : $\Phi_a = \sum_{i=1}^{\infty} C^i \Phi_a^i$, so gibt (2) in (1) ein-

gesetzt ein System von Differentialgleichungen für die Φ_a^i , deren erste

$$(\square - \mu^2) \varphi - 3\lambda \varphi^2 = 0 \quad (3)$$

lautet, wo $\varphi = C\Phi_a^1 + \Phi_e$. $C\Phi_a$ kann als gestreute Welle interpretiert werden, da seine Intensität jener von Φ_e proportional ist. (3) bedeutet daher, daß die Mesonen an einem Potential der Stärke $V(r) = (3\lambda/2\mu)\varphi^2(r)$ gestreut werden. Mit $\varphi = \varphi_0 \cdot \exp[-\alpha(\mu r)^n]$ erhalten wir für Kohlenstoff³ ($\varphi_0 = 0,08581\mu$; $\alpha = 0,02182$; $n = 4,359$): $V(0) = 641 \text{ MeV}$. Aus diesem stark abstoßenden Potential kann man zunächst noch keinen großen Streuquerschnitt folgern, da sich der Atomkern ähnlich einer starren Kugel verhält. Wegen der Stärke des Potentials mußte die S-, P- und D-Welle numerisch integriert werden; für die F- und G-Welle genügte eine Bornsche Näherung. Die Phasendifferenzen wurden für 62 MeV-Pionen berechnet und ergeben $\sigma = 1,65$ barns. Dies entspricht der Streuung an einer starren, vollkommen spiegelnden Kugel vom Radius $R \approx 3/\mu$. Da der experimentelle Streuquerschnitt⁵ elfmal kleiner ist, spricht dieses Ergebnis gegen eine zu starke Nichtlinearität in der Mesongleichung.

¹ L. Schiff, Phys. Rev. **84**, 1 [1951].

² W. Thirring, Z. Naturforsch. **7a**, 63 [1952].

³ P. Mittelstaedt, Z. Phys. **137**, 545 [1954].

⁴ W. Thirring, Z. Naturforsch. **9a**, 804 [1954].

⁵ H. Byfield, I. Kessler u. L. Lederman, Phys. Rev. **86**, 17 [1952].